Квадратура круга — Lurkmore

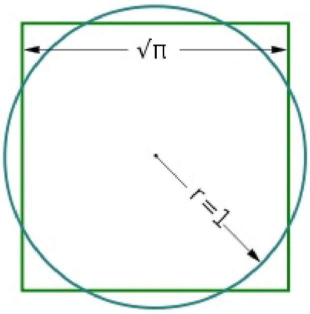
«Академия постановила не рассматривать отныне представляемых ей решений задач удвоения куба, трисекции угла, квадратуры круга, а также машин, долженствующих осуществить вечное движение »

— *французские учёные*

Квадратура круга — один из первых в истории математики случаев, когда человеческий разум долгое время буксовал перед нехитрой на первый взгляд задачей. Всего-то и требуется, что построить квадрат с площадью, равной площади данного круга, посредством циркуля и линейки. Около трёх тысяч лет (!) бесплодных усилий, испорченная репутация достойных учёных, сошедшие с ума армии фриков, драма, срачи, боль и ненависть, а в результате — лишь доказательство невозможности данного построения. Является, наряду с великой теоремой Ферма, синонимом неразрешимой задачи.

О постановке задачи

Прежде чем начать подробный рассказ об этой чудной задаче, несколько слов об условии. Откуда берутся циркуль и линейка? Ответ на сей вопрос весьма прозаичен. Все первые задачи геометрии и алгебры появлялись из сугубо прикладных задач, например, архитектурных. Те же египтяне для постройки прямых углов изобрели египетский треугольник со сторонами три, четыре и пять, открытие которого было лютым вином, сравнимым с изобретением колеса, потому как правильно выверять углы нужно хотя бы для того, чтобы колонны не были вкривь и вкось. Чисто практически легче всего построить прямую (хуле, верёвку натянул — и готово) и окружность (заколотил колышек, привязал верёвку нужной длины и вот тебе окружность с данным радиусом готова). Собственно, во времена фараонов и обходились в основном таким нехитрым инструментарием для планирования построек всяких пирамид, сфинксов и прочих Карнакских храмов.

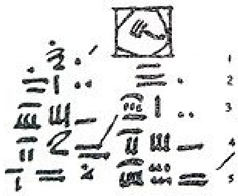


Суть

Итак, проблема, дорогой читатель, в том, что если у окружности радиус (длина привязанной верёвки) положить равным единице, то площадь квадрата равна числу п, столь милому сердцу анонимуса. С учётом того, что корень извлекать циркулем и линейкой — наука невелика даже по меркам древнего мира: вполне достаточно построить отрезок длины п. Но в нём-то и кроется главная трудность. Ибо число это мерзкое, негодное и обладает очень неприятной природой, а именно — оно трансцендентно. Осознать и вообще понять потенциальную невозможность такого построения — очень сложная задача. Решить её окончательно удалось только в XIX веке. А до этого времени были армии желающих всё-таки изобрести доказательство. Кому-то удавалось найти приближённое решение, кто-то свято верил, что найденное именно им решение правильно, и доставал окружающих, тыкавших ему в ошибку. Кто-то сходил с ума в поисках от бесцельности, кто-то всю жизнь вычислял это проклятое число. В общем, драм и лулзов хватало. Тащемта, после того, как с квадратурой круга удалось разобраться, её место в умах миллионов заняла Теорема Ферма, но это уже другая история.

Ебипет

В папирусе Ринда, записанном неким писцом Ахмесом, датированном примерно 1650 бородатым годом до рождества Изи Крестовского, впервые встретилась эта чудная задача, формулировку которой можно лицезреть на картинке. Собственно, папирус этот был не чем иным, как методичкой, в которой приводились способы решения разных прикладных задач. Что именно предлагается в случае квадратуры круга, науке толком неизвестно, так как для этой задачи пояснительный текст весьма расплывчат. По одной из версий, НЁХ в верхней части рисунка — это восьмиугольник, по предположению египтян равный площади вписанного в квадратик круга. Насколько эта интерпретация корректна — вопрос сложный, но обычно именно это и принимается за точку отсчёта документированной истории квадратуры круга.


Древнеегипетская версия задачи

Судя по различным дошедшим до нас источникам, в зависимости от эпохи и продвинутости конкретной артели мастеров, в древнем Египте число п полагали равным трём, ну или в лучшем случае ≈3,16. Что, надо сказать, для древнего мира неплохо, но для суперпродвинутой цивилизации, которая, согласно всякой скляровщине, строила пирамиды, жидковато.

Видимо, помимо Египта эта задача всплывала в различных видах и в Вавилоне, и в Ассирии, и в Финикии, но с чёткими пруфами у истории плохо. Вообще, любой народ, достигший успехов в архитектуре, рано или поздно с этой проблемой сталкивается.

Достоверно известно, что в Израиле было ровно 3:

> «И сделал литое из меди море, — от края его до края его десять локтей, — совсем круглое, вышиною в пять локтей, и снурок в тридцать локтей обнимал его кругом. »

— 3 Цар. 7:23

Ошибочка небольшая — всего 1 локоть. Это где-то 0,77 метра.

Древняя гречность

В Древней Греции математика зародилась уже в том виде, в каком существует и сейчас. Впервые начали даваться строгие™ определения, а для доказательств применяться строгие рассуждения. Тогда же задача и была сформулирована в том виде, в каком она известна и нам. Именно в те благие времена, под сенью олив, начались первые заезды на решение данной задачи. Поскольку древнегреческая наука была сильно завязана на конкретную личность, стоит рассмотреть несколько конкретных и по своему эпичных персоналий.

Антифонт

Весьма интересная личность. Анархист, нигилист, тролль, философ, оратор и просто хороший человек. В контексте данной статьи интересен тем, что первым придумал решение задачи (неправильное). Точной инфы, что же он придумал, нет, но похоже, что он, не мудрствуя лукаво, вписал многоугольник в окружность, посчитал его площадь и объявил её равной площади круга. А квадратура многоугольника — задача по тем временам уже хоть и непростая, но разрешимая. Тем он и удовлетворился. ЧСХ, решение он придумал, сидя в тюрячке за свои выкрутасы. Передачи ему носили в числе прочих Платон и Евдокс, которых он убедил в верности своего решения. Собственно говоря, идея хорошая и в высшей степени годная, но, к сожалению, не дающая точного™ ответа.

Гиппократ Хиосский

Сей достойный муж жил несколько позже Антифонта и не имел отношения к Гиппократу, клятву в честь которого дают медики. Интересен он тем, что первым придумал то, что длина окружности пропорциональна радиусу. Строго он этого доказать, по всей видимости, не мог — для этого потребовался целый Архимед, — но уже сам факт чёткой формулировки этого утверждения говорит о нехилом продвижении греческой науки. Именно этот коэффициент пропорциональности, заподозренный Гиппократом, и называют числом π. Среди прочего, Гиппократу удался результат по квадрируемости так называемых «луночек Гиппократа» — фигур, составленных из дуг окружностей. Это неслабо подлило масла в огонь надежды на скорое разрешение квадратуры круга.

Архимед

Помимо множества других изобретений учёного мужа, в контексте квадратуры круга он придумал весьма винрарный метод, который принёс результат при подсчёте площади под параболой. Он полагал, что поскольку и парабола и окружность — конические сечения, то решение уже где-то рядом. Площадь под параболой он считал так: разбил интересующую его область на маленькие кусочки и посчитал их площади. Потом стал строить всё более точные разбиения и вычислил, что получится в пределе. Слов таких он, естественно, не знал, но в переводе на современный язык суть была такова. По сути, Архимед взял интеграл — за два тысячелетия до того, как всякие Ньютоны с Лейбницами вообще его придумали.

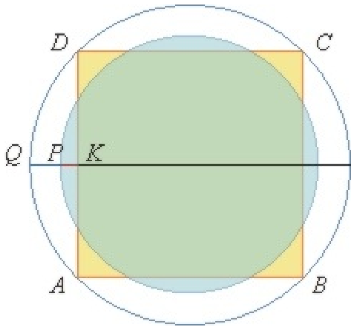
Для круга он решил применить тот же трюк. Он рассмотрел вписанные и описанные вокруг окружности многоугольники и доказал, что отношение их периметров (стремящихся к длине окружности), а также их площадей (стремящихся к площади круга), к радиусу окружности существует. Даже приближённо его посчитал, но ответа в знакомых ему рациональных числах найти так и не сумел. На самый главный шаг в решении этой задачи, понятие трансцендентного числа, его гения всё же не хватило. Впрочем, это всё равно был лютый вин, потому как в следующие две тысячи лет единственное, на что оказались способны его последователи, — приближённо считать число π.

Почему не получилось

В чём же причина фейла древних греков? Технически, Архимед решил самую сложную часть задачи. Да и другие древнегреческие учёные, среди которых были «не дурее», не смогли продвинуться дальше. Дело в том, что греки умело обращались только с рациональными числами. Они хорошо понимали, что такое целые числа и их отношения друг к другу. Со скрипом, но всё-таки рассматривали они и корни из рациональных чисел, например, корень из двух — после эпичнейшего срача пифагорейцев, которые выяснили, что помимо рациональных чисел есть гадкие иррациональные. Выяснилось это при рассмотрении диагонали единичного квадрата (по теореме Пифагора она равна $\sqrt{2}$). Однако число π имеет другую, более ~~блядскую~~ сложную природу, не являясь ни рациональным, ни корнем из такового — просто не входя в область тех чисел, которые знали греки. А разгадка проста: у них не было способа записи уравнений в привычном нам буквенном виде. Все рассуждения их были словесными, поэтому они не могли даже поставить вопрос о существовании каких-либо чисел помимо уже указанных.

Индусы и кетайцы

Ни тем, ни другим продвинуться дальше древних греков не удалось. И если грекам всё же удалось придумать способы квадратуры круга посредством более хитрых инструментов, чем циркуль и линейка, то пруфов того, что это удалось индусам или китайцам, нету. В индуизме притом требовалось делать квадратуру при построении алтарей. Один из способов, который можно видеть на картинке сбоку, давал π ≈ 3,088. По дошедшим до нас сведениям, максимум, чего индусам и древним китайцам удалось добиться, — это π ≈ 3,1416, что, конечно, неплохо, но всё равно не даёт абсолютного ответа. Впрочем, не факт, что эти цивилизации вообще ставили себе задачей найти идеальный ответ: абстрактной™ математики в древнегреческом смысле слова у них не было.



Смотри! PK : KQ = 1 : 2. Площадь тёмно-синего круга очень близка к оной квадрата

Средневековье

Время широких, мощных, теоретических умов закончилось вместе с античными учёными. Средневековье, впрочем, оказалось урожайно на деятельность весьма сомнительной полезности. Единственное, что им удавалось — съезжать с катушек, считая всю жизнь по методу Архимеда знаки после запятой. Время от времени очередной ум открывал новое решение и бывал в очередной раз побиваем коллегами и тыкаем носом в ошибку. Многие ошибок не видели, пополняя армию писателей писем по академиям и заёбывателей собратьев по научному цеху. Хотя некоторым удавалось придумать различные способы решения, используя различные средства помимо циркуля и линейки. Вот несколько примеров, лишний раз показывающих адок, творившийся в средневековой науке.

Лудольф ван Цейлен и прочие вычислители

«Число Пи для гренландских китов равно трем. »

— Справочник китобоя

В общем-то, скорее, Келин, но надмозги, как всегда, за работой. Голландец Лудольф всю жизнь вычислял число π, следуя методу Архимеда, ибо в Средневековье было не принято изобретать новое. Кошерными считались исключительно достижения древности, а за всякие новшества могли и на костёр отправить. Цейлен насчитал за свою жизнь 35 знаков после запятой. Перед принятием окончательной религии завещал выбить вычисленное им приближение на своей могильной плите, что и было исполнено. В честь упрямого нидерландца это 35-значное приближение называют Лудольфовым числом. Сложно поверить, что на подобную херню можно потратить всю жизнь, но Цейлен был далеко не одинок. Так, его последователь по фамилии Шенкс насчитал аж 707 знаков и ничтоже сумняшеся даже опубликовал свою работу. Желающих проверить среди современников, разумеется, не нашлось. Уже в эпоху компьютеров выяснилось, что в 528 (!) знаке он проврался. Даже по тем временам работа сих учёных мужей представлялась вменяемым современникам идиотизмом, потому как ни для каких практических вычислений такая точность была не нужна. На что они надеялись? Видимо в начале работы они надеялись «по аналогии» придумать общее решение задачи нахождения числа π. Но под конец жизни, надо полагать, оставался один рак. Подобное недонаучное безобразие прекратится только в XIX веке, когда в задаче будет поставлена точка. Но об этом позже.

Копия могилы ван Цейлина. Оригинал просран

Гоббс vs Валлис

Возможно, один из самых эпичных срачей не только на тему квадратуры круга, но и вообще за всю историю математики. Гоббс был философом, автором труда «Левиафан», вызвавшего грандиозные бурления в те времена. Среди прочего, Гоббс изволил разродиться своим видением математики в целом и парочкой решений задачи о квадратуре круга в частности в труде «De Corpore», что в переводе с латыни обозначает «о теле». Искренне ненавидевший его Валлис, надо сказать, был тоже парень не промах — один из крупнейших математиков своего времени в Англии и в мире. Если что, его современники — такие ребята, как Ньютон, Ферма и Паскаль. Пройти мимо математической хуиты Гоббса, который геометрию любил, но не понимал, и не был профессиональным™ математиком, он не мог. В результате Гоббс был жестоко травим за все свои ошибки и недостаточно корректные высказывания. Если критика философской части (за которую как раз Гоббса чуть не сожгли) всё же относительно несостоятельна, то избиение его математических «идей» вошло в историю как годный пример того, как надо травить фрика. Валлис жёстко тыкал Гоббса во все его ошибки, вплоть до неправильного употребления терминов, сочетая это с едкими и злобными комментариями, от которых Гоббс рвал и метал. Поскольку дискуссия велась в эпистолярном жанре, желающие могут насладиться подробностями. Рекомендуется к прочтению, например, эта книжка про великие ~~срачи~~ диспуты в науке.

Леонардо да Винчи

Великий ум на то и велик, чтобы отметиться везде, где только можно. Не прошёл Леонардо и мимо квадратуры круга. В отличие от прочих, он не позорился с «точными» решениями, а как настоящий практик предложил простое и крайне кошерное. Берём цилиндр, обмазываем чернилами и прокатываем так, чтобы каждая точка отпечаталась по разу. У полученного прямоугольника одна сторона равна высоте цилиндра, а вторая — длине окружности. Если высота цилиндра равна половине r, то получается прямоугольник искомой площади: πr^2. А построить по прямоугольнику равновеликий квадрат — это ещё древние греки умели. Элементарно, Ватсон! Хотя и не очень понятно, был ли Леонардо наш да Винчи первым, кто это придумал, но способ традиционно приписывают ему. И надо сказать, это один из самых красивых и, сцуко, простых способов решить эту задачу.

Game over

В XIX веке европейское человечество наконец приблизилось к древней Греции по уровню свободы на душу населения, а математика вернулась на аксиоматические рельсы, начинающиеся, ЧСХ, всё в той же Греции. Появилась теорема Штейнера, показывающая, что циркулем и линейкой можно, выражаясь алгебраическим языком, решать только уравнения не выше второй степени, что заодно позволило разобраться с проблемой удвоения куба. Выяснилось Ламбертом, что число π — иррационально и корнем из рационального не является. Ну и, наконец, Линдеман показал, что оно вообще трансцендентно, то есть нет такого уравнения с целыми коэффициентами, чтобы число π было его корнем. Это окончательно решило ~~еврейский вопрос~~ вопрос о квадратуре круга: **циркулем и линейкой — нельзя**. Впрочем, на этом фундаменте выросла целая наука, изучающая алгебраические и трансцендентные числа, весьма годная и важная в этой вашей криптографии.

Карл Луи Фердинанд фон Линдеман ставит точку.

«А что же фрики?» — спросит въедливый читатель. А они практически унялись, удовлетворившись этим решением, место которого в их сердцах заняла теорема Ферма, решение которой появилось только в самом конце XX века, а «поток решений» задачи квадратуры круга сейчас скорее похож на иссякающий родничок. А разгадка проста. Доказательство невозможности построения квадратуры почти полностью укладывается в курс школьной программы. Кроме того, есть немало научно-популярной литературы, в которой данная проблема разжёвывается весьма понятным языком.

Отметим для любознательных, что примерно в те же времена был решён и вопрос о том, как лучше считать число π. Оказалось, что метод Архимеда — плохой, негодный. Ручками, а лучше на компьютере считать через ряды. Луркайте, например, формулу Бэйли—Боруэйна—Плаффа (которая, что любопытно, позволяет считать в 16-ричной системе любой желаемый знак, не вычисляя остальных), формулы Рамануджана и прочих Белларов. Тысячи их. Но важно понимать, что все эти формулы имеют сугубо теоретический интерес в вопросах хуемера из серии «у кого комп круче». На практике так много знаков после запятой для конкретных вычислений нафиг не нужно.

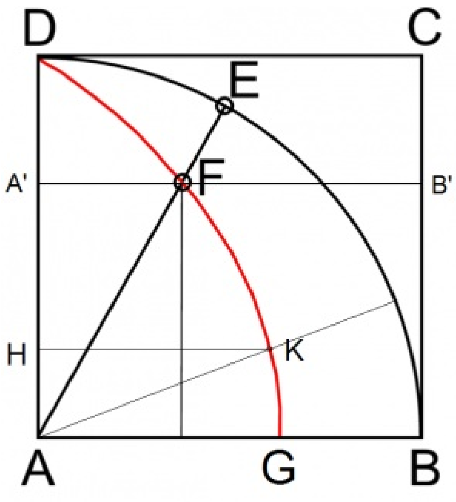
К добру ли, к худу ли, но сия планета никогда не оскудеет на идийотов. Вот пример, когда сама задача квадратуры круга не решена, но теорема Линдемана опровергнута на коленке. А вот другой, с пирамидами и космической мудростью. Ну и на закуску — квадратурщик, срывающий покровы с заговора математиков и решающий, прости г-ди, задачу «кругатуры квадрата».

А если пойти другим путём?

Многие, отчаявшись найти решение циркулем и линейкой, пытались сделать это другими способами. Тут было два основных пути. Первый — практический. Строилась какая-нибудь вундервафля, которая рисовала отрезок длины π. Наиболее винрарен здесь способ да Винчи, уже поминавшийся. Этим способом задачу решали в основном всякие инженеры. А вот математики невозбранно ходили другим путём. Достаточно построить какую-нибудь хитрую кривую, посредством которой квадратура строилась. Вот несколько примеров.

Квадратриса

Один из первых способов точно построить квадратуру, изобретённый всё в той же древней Греции. Подробности можно прочитать в соответствующей статье на загнивающей. А здесь ограничимся определением кривульки. К слову, кривая меметична в первую очередь тем, что это одна из первых кривых, которые определяли «кинематически», то есть как механическую конструкцию. Итак: на картинке справа точка E равномерно движется по дуге окружности одновременно с горизонтальной «планкой» A'B'. Точка пересечения последних движется по искомой кривой — собственно, квадратрисе. Что характерно, при помощи этой же кривой можно ещё и проводить трисекцию угла.



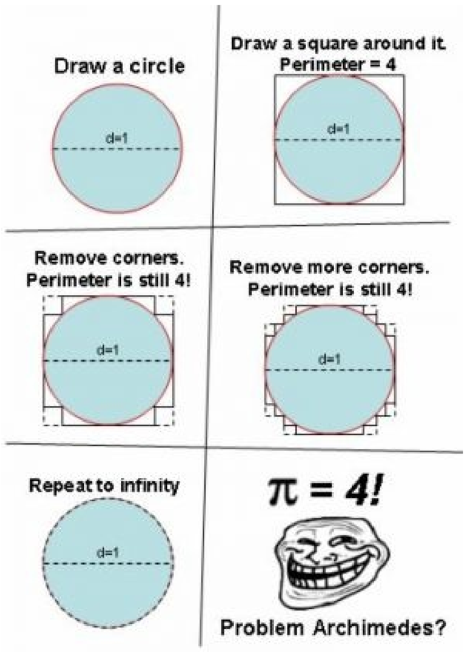
Древние греки придумали квадратрису. А чего добился ты?

Игла Бюффона

Один из самых доставляющих и худших способов посчитать число π. Суть проста. На плоскости начерчены параллельные прямые на равном расстоянии. На неё наудачу бросают иглу длины меньшей, чем расстояние между прямыми. Какова вероятность того, что игла пересечёт одну из прямых? Ответ внезапно даёт число, обратно пропорциональное π и связанное с расстоянием между прямыми и длиной иглы. Причём для того, чтобы получить число π с точностью до 3 знака, уже нужно несколько тысяч (sic!) бросков. Подробности в загнивающей.

Такие дела

На сегодняшний момент наука ушла вперёд бороздить пространства вселенной. А в литературном языке осталась идиома «квадратура круга» как синоним неразрешимой проблемы, да слово «квадратурщик», которым обзывают не только непосредственно изучающих данный вопрос, но и всех прочих фриков. Также в качества синонима пользуют и слово «ферматист», но последнее — не звучит-с.



Problems?

См. также

Вообще-то «великих задач древности» было три. Помимо обмусоленной тут квадратуры, были ещё:

- Трисекция угла — как разделить угол на три равные части.
- Удвоение куба — как построить куб вдвое большего объёма.

А вообще, учиться по лурке лучше, чем не учиться вовсе, но всё же в идеале надо читать книжки.

- Годная книга про всё это безобразие.
- Ещё одна — для самых любознательных.

Алсо

- Квадратура круга — рассказ О. Генри из сборника *Огни большого города*.
- Квадратура круга — это спектакль, так-то!

Ссылки

Квадратура круга

Матан

265 Science freaks Scorcher.ru Sherak TeX Xkcd Алекс Лотов Александр Никонов Андрей Скляров Артефакты Петербурга Атомная бомба Березовский Бесполезная наука Биореактор Блез Паскаль Большой адронный коллайдер Большой взрыв Британские учёные Бритва Оккама Бронников Вадим Чернобров Вассерман Великая тайна воды Великая теорема Ферма Миша Вербицкий Вечный двигатель Взлетит или не взлетит?

Виктор Катющик Виктор Петрик Владимир Жданов Высшая математика Геннадий Малахов
Геометрия Лобачевского Гомеопатия ГСМ Двести двадцать Декарт Деление на ноль
Детерминизм Дети индиго Дигидрогена монооксид Древний Египет/Клюква Евгеника
Задача Льва Толстого Задача Эйнштейна Закон Мерфи Закон Парето Инженер
Информационное поле Вселенной ИТМО Как поймать льва в пустыне Кари Байрон
Карл Саган Квадратно-гнездовой способ мышления Квадратура круга Квантовая механика
Клон Когнитивная психология Коробочка фотонов Корчеватель Кот Шрёдингера
Критерий Поппера Кубик Рубика Лаборатория Лейбниц Леонардо да Винчи Луговский
Лунный заговор Лысенко Льюис Кэрролл Любительская астрономия Мальтузианство
Матан Матан/Элементарные частицы Межконтинентальная баллистическая ракета
Метод научного тыка Мулдашев МФТИ Мэттью Тейлор Нанотехнологии Наука vs религия
Научное фричество Научный креационизм Научный креационизм/Аргументация
Неуместный артефакт Никола Тесла НЛП НМУ Олег Т. Омар Хайям Палата мер и весов
Пентаграмма Григорий Перельман Переслегин Пик нефти Пирамидосрач Плутон
Принцип Арнольда Простые числа Пушной

Числа

1 Guy 1 Jar 101-й километр 10:10 1111 12309 127.0.0.1 128 bit 13 14/88 1500 рублей
16 рублей 1917 1984 2 Girls 1 Cup 2 в 1 2000 2012 год 228 25-й кадр 265
28 героев-панфиловцев 282 статья 3,5 анонимуса 3,62 3605 3730 40 кг хурмы 410 42
640 килобайт 666 7:40 90% женщин — изнасилованы 95% населения — идиоты
9600 бод и все-все-все DotA In 5 Seconds IT'S OVER NINE THOUSAND! Leet Monkey Dust
Nokia 3310 X86 Автомобильные номера Большой Пиздец/Предполагаемые даты
БОЧ рВФ 260602 Веб 1.0 Веб 2.0 Великая теорема Ферма Восьмидесятые Вячеслав Мальцев
Гет Двести двадцать Девяностые ДЕЕ1991ГР Деление на ноль Десятые
Днепропетровские маньяки Жертвы пранка Закон Парето Звёздные войны Золотой миллиард
Зона 51 Инфа 100% Йобибайт Квадратура круга Код Матан
Миллиард расстрелянных лично Сталиным Мне 20 и я бородат Мытищи Нулевые Плюс 1
Полшестого Правило 34 Правило 63 Правило трёх секунд Проблема 2000 Простые числа
Пятисемит Рулетка Семь чудес света Слава роботам Сотни нефти Стопицот Сырно
Тёмная башня Теория относительности Три обезьяны Тринадцать миллионов педофилов
Число Грэма Число Эрдёша Чуров Чуть более, чем наполовину Эльф 80-го уровня