Теорема Абеля — Галуа — Lurkmore

Теорема Абеля — Галуа — гласит, что не существует общей формулы для решения уравнений выше четвёртой степени. Казалось бы, что может быть интересного в такой зауми? Однако, дорогой читатель, это удивительная история с интригами, французской революцией, убийством и потерянной рукописью. Сложно сказать, что в этой истории мякотка, а что писечка, но история занимательна с самого начала. Впрочем, начинать придётся, как водится, издалека.

Седая древность

«Как и другие науки, математика возникла из практических нужд людей: из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов, из счисления времени и из механики. »

— *Энгельс*

Глиняная табличка Plimpton 322. Тут написано что-то тригонометрическое, но это не точно [1]

Очень давно человечество встало перед проблемой решения разных уравнений. Если линейные уравнения приходилось решать при банальном походе на базар, то квадратные уравнения начали появляться при решении задач на площадь. Эти задачи возникали при делении, скажем, плодородной земли поровну между соседями. Так что как только человечество начало всерьёз заниматься земледелием, пришлось научиться и решать квадратные уравнения.

Мы более-менее точно знаем, что уже шумеры в этом своём древнем Вавилоне вполне умели решать квадратные и даже некоторые кубические уравнения. Первая более-менее внятная формула (то есть правило по нахождению хотя бы одного корня) была изобретена, вероятно, ими же. Впрочем, чего они там придумали и нашкрябали на своих глиняных табличках — не всегда понятно. Дело в том, что до нас дошли в основном *примеры* задач с методом решения. То есть в своём роде типовые задачи с методичкой по их решению. Вот, например, как тебе, анон, такая задачка

«Имея 1,30,0 гар земли, я возьму город, враждебный Мардуку, 6 взял я за основание земляной массы, 8 — за расстояние до от стены; 36 — высота земляной массы. Сколько должен я утоптать в длину, чтобы взять город? Что есть длина позади крутизны? »

— *Вавилонянин вопрошает*

Нихуя не понял, дружок? Имеется в виду на самом деле вот что: *(спойлер:* Нужно найти высоту стены города, враждебного Мардуку, к которому строится земляная насыпь. Про насыпь известна её ширина, высота в некоторой точке и оставшееся расстояние от этой точки до стены.*)* Подробней обмазаться вавилонской математикой можно, например, тут.

Впрочем, к моменту зарождения математики в современном смысле этого слова в Древней Греции задача решения квадратного уравнения уже была более-менее разрешена. Греки занимались уже более продвинутыми вопросами, например квадратурой круга. И, по сути, умели решать квадратные уравнения, скажем, циркулем и линейкой. Поскольку именно эти инструменты считались наиболее кошерными, большее их не особо-то интересовало. Впрочем, и уравнения более высоких степеней им тоже встречались. К примеру, задача об удвоении куба приводит к простейшему кубическому уравнению.

Важно понимать, что у древних греков не было никакой формальной символьной записи, так что поставить вопрос о разрешимости того или иного уравнения было для них затруднительно. Интересно, что за решение уравнения они принимали нахождение любого корня (а как знает любой школьник, у квадратного уравнения их обычно джва).

Как решать уравнения, не тревожа инквизицию?

Самое начало 16-го века. Италия. Повсюду творится чад кутежа и инквизиция. В Испании только закончил зажигать Торквемада, по Европе гуляют изгнанные евреи, а в самой Италии не утихают войны. Именно в это чудесное время произошли важные события. Главными участниками были Сципион дель Ферро и Никколо Тарталья. Про первого сказать что-то значимое сложно. Старина Сципион родился с серебряной ложкой во рту, окончил университет в Болонье и всю жизнь проработал там профессором.

Однако он совершил win, придумав формулы для решения кубических уравнений $x^3 = px+q$ и\или $x^3+px=q$. Дело в том, что в те времена не очень умели не то что в комплексные числа, но даже и в отрицательные. Так что все коэффициенты предполагались обязательно положительными и эти два уравнения, соответственно, были неодинаковыми. Разобрать нынче, какое из этих двух уравнений (а то и оба) научился решать дель Ферро — не представляется возможным.

В дальнейшем он обучит методу решения этих уравнений своего любимого ученика Антонио Фиоре, которому и предстоит встретиться с другим куда более занимательным участником этой истории.

Николо Тарталья

«Этот человек по натуре своей был так склонен говорить только дурное, что, даже хуля кого-нибудь, считал, что дает ему лестный отзыв »

— Бомбелли

Тарталья смотрит на тебя как на кубическое уравнение

Родился на рубеже 15 и 16 веков, вероятно, в Брешии. Тарталья, судя по всему, не фамилия, а прозвище. В переводе это значит не то «картавый», не то «заика». По всей видимости, в детстве Тарталью неудачно подстрелили, и он приобрёл на всю жизнь дефект речи и крайне желчный характер. Будучи по происхождению нищебродом, грамоте и математике он обучался в основном сам. Что не помешало ему стать вполне значимым учёным.

В те времена отношения между учёными выяснялись на турнирах. Оные турниры состояли в том, что учёные по очереди задавали друг другу задачи. Кто смог решить задачи соперника и предложить оппоненту задачу, которую тот решить не смог — тот и победил. В частности, на таких турнирах решалось, кто же займёт кафедру, кто получит годную должность.

Суть этих турниров, мягко говоря, не располагала учёных к тому, чтобы трубить на всех углах о своих открытиях. Куда лучше было, придумав что-нибудь, припрятать технологию и невозбранно мочить после этого соперников на турнирах. Именно так и поступил дель Ферро со своим учеником.

Но, как известно, на каждую хитрую жопу найдётся хуй с винтом. И когда не в самый лучший для себя день Фиоре предложил Тарталье задачи, связанные с упомянутыми выше уравнениями третьей степени, случилось неладное. Тарталья сумел придумать метод их решения и успешно решил задачи Фиоре. По всей видимости, Тарталья придумал способ решать и те уравнения, которые были недоступны дель Ферро и Фиоре, и тем самым уделал сопляка Антонио. Epic Win.

Несмотря на весьма желчный характер, у Тартальи завёлся дружок — Кардано. Неизвестно, как Кардано сумел умаслить Николу, но под большим секретом, и под обязательством никому и никогда не рассказывать без разрешения Тартальи, поведал-таки секрет формулы.

А дальше Кардано опубликовал свой труд «Великое искусство», в которой ничтоже сумняшеся включил метод решения уравнений третьей степени, сославшись на «своего друга» Тарталью. Тарталья отложил кирпичей, из которых можно было бы построить второй университет в Болонье, но сделать было уже ничего нельзя. Великий секрет — утёк.

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = c_1+c_2-\frac{b}{3a} \\ x_2 = -\frac{c_1+c_2}{2}-\frac{b}{3a}+\frac{c_1-c_2}{2}\sqrt{3}i, \\ x_3 = -\frac{c_1+c_2}{2}-\frac{b}{3a}-\frac{c_1-c_2}{2}\sqrt{3}i \end{cases} \text{где} \begin{cases} p=\frac{3ac-b^2}{3a^2} \\ q=\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3} \\ c_{1,2}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = c_1+c_2-\frac{b}{3a} \\ x_{2,3} = -\frac{c_1+c_2}{2}-\frac{b}{3a}\pm\frac{c_1-c_2}{2}\sqrt{3}i \end{cases}, \text{ где}$$

$$c_{1,2}=\sqrt[3]{\frac{-2b^3+9abc-27a^2d}{54a^3}\pm\sqrt{\frac{27a^2d^2-18abcd+4ac^3+4b^3d-b^2c^2}{108a^4}}}$$

Та самая формула, для желающих с выводом. Внушает, не так ли?

В гневе была забита стрелка Кардано и его ученику Луиджи Феррари. Но, к сожалению для старого склочника, к тому моменту Феррари сумел (вероятно, не без помощи Кардано) добиться следующего эпика. Он усовершенствовал метод Тартальи и придумал формулу для решения уравнений четвёртой степени. Тарталья на турнире был разбит. Более ничем он доставить в своей жизни так и не смог, продолжая до конца дней переводить труды Архимеда и Евклида на итальянский, и тихо умер никому не нужный в 1557 году в весьма почтенном возрасте.

Кардано

Сам Джероламо Кардано, кстати, тоже весьма колоритная личность. Прежде всего, Джери — натуральный бастард. Папаша-юрист усыновил сына только перед самой своей смертью. В детстве Джероламо проявил немалый талант и сообразительность, по причине чего был направлен отцом учиться. И таки выучился на медика. Вообще, Кардано был личностью весьма разносторонней. Занимал кафедру профессора математики в Милане, занимался составлением гороскопов. Заинтересовал своей деятельностью инквизицию и провёл несколько месяцев под арестом, после чего отправился каяться в Рим. По одной из версий, причиной интереса стало составление гороскопа для Иисуса.

Профиль Кардано

Впрочем, слава пришла к Кардано не благодаря гороскопам и медицине, а благодаря фундаментальному труду «Великое искусство», в котором он и привёл упомянутую формулу для решения уравнений третьей степени. Там же он рассказал и про уравнения 4-й степени, и про формулы Виета (до Виета). Одну из формул, по всей видимости, как раз он и открыл.

Опубликовал Кардано в разных своих книгах и много другой годноты, которую, что характерно, открыл отнюдь не он: карданов подвес, кодовый замок. То ли сам изобрёл, то ли удачно описал нехитрое приспособление для шифровки и дешифровки — «решётку Кардано». Вообще, он оказался и объектом, и субъектом принципа Арнольда. Формулы, которые придуманы с его непосредственным участием, нарекли именами его ученика и Виета, а вот к изобретению того, что было названо в его честь, сам Джероламо отношения не имел.

Жизнь наш герой прожил бурную. Менял адреса, университеты и деятельность: от медицины и математики до составления гороскопов. С детства он мечтал обессмертить своё имя, что ему удалось. К сожалению, с детишками ему не очень повезло: одного его сына судили, пытали и обезглавили за отравление своей супруги, которая, как выяснилось, наставила ему рога. А второй в качестве профессии избрал шулерство. Да ещё и обчистил любимого папу. Такие дела.

По легенде, Кардано предсказал день своей смерти. И, чтобы ответить за базар, в нужный день убил себя ~~анстену~~.

Комплексные числа

Проблема хорошо известной тебе, анон, формулы для решения квадратных уравнений (той, что «с дискриминантом») в том, что в ней н-н-надо извлекать корень из числа, которое, вообще говоря, может быть отрицательным. Можешь решить, например, уравнение $x^2+1 = 0$? То-то.

С квадратными уравнениями тут нет особой беды. Если дискриминант отрицательный, то и уравнение не имеет вещественных (обычных, то есть) решений. Nuff said. Однако с уравнениями третьей степени всё обстоит куда хитрее. Оказывается, что в формуле Кардано (точнее Тартальи, точнее Ферреро, точнее дель Ферро, ну ты понел) иногда выражение под корнем отрицательное, однако в результате как бы сокращается, и получается вещественный корень, который, ко всему прочему, может легко угадываться.

Тарталья и Кардано этот момент проигнорировали (ну то есть они наверняка об этом думали, но ничего путного, видимо, не придумали). А вот гражданин Бомбелли предложил изящное решение, что называется, «в духе времени». Было решено корнями из отрицательных чисел пользоваться, но только если они в результате сокращаются. То есть при расчёте атомного реактора можно пользоваться числом ангелов, умещающихся на конце иглы, но в конечном ответе этого числа быть не должно. С учётом тёплой атмосферы, царящей тогда в Европе — решение, не лишённое логики.


L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

Книга, в которой Бомбелли окончательно легализовал

В общем, до явления в математику Эйлера комплексные числа являли собой странный предмет. Как вычислять — вроде есть, но официально нет. Только в 18 веке комплексные числа окончательно пропишутся в математике и перестанут вызывать странное ощущение.

Попробуем на пальцах объяснить, что такое комплексные числа, а главное, зачем они так нужны.

Начнём издалека. Более-менее понятно, что такое натуральные числа (впрочем, на самом деле тут тоже всё непросто). Натуральные числа — это всё то, что можно посчитать: овцы, бараны, деньги. Что же такое рациональное число? Составим уравнение ax=b, где a, b — натуральные числа. Вот решения таких уравнений и можно назвать рациональными (пока положительными!) числами. С переходом от рациональных чисел к вещественным — чуть-чуть хитрее, и углубляться в этот вопрос мы пока не будем.

отрицательные числа и начал легалайз комплексных

Теперь будем считать, что мы умеем в положительные числа. На самом деле никаких других, в сущности, и не бывает. Никто не видел −100 рублей, −10 км и т. д. В этом смысле удобно сказать, что отрицательные числа — это такая абстракция, которая очень помогает при вычислениях. Обозначим через «-1» решение уравнения x+1 = 0, а отрицательными числами назовём числа вида (-1)*b, где b — это обычные положительные числа. Таким образом, из необходимости научиться решать линейные уравнения мы получаем рациональные числа, как положительные, так и отрицательные. С вещественными числами всё, повторимся, посложнее.

Итак, анон, повторим логику, приведенную выше. Есть уравнение $x^2+1=0$. Оно квадратное, так что у него должно быть джва корня. Обозначим их через i и -i. Соответственно, чисто формально $i^2=-1$. Ну и традиционно мы будем писать, что $i=\sqrt{-1}$. Теперь назовём комплексными числами всё, что имеет вид a+i b, где a и b — обычные вещественные числа. Легко сообразить, что любое квадратное уравнение имеет два (возможно, совпадающих) комплексных корня, в том числе и упомянутое выше $x^2+1=0$. Профит!

Возникает предположение, что, наверное, надо будет ещё раз повторить процедуру и ещё больше увеличить множество «чисел», чтобы научиться решать уравнения старших степеней. Мы об этом поговорим чуть позже, но пока спойлер. Нет! Комплексных чисел достаточно. И, оказывается, что в комплексных числах любое уравнение n-й степени имеет ровно n корней (часть из которых, возможно, совпадает).

С учётом упомянутых выше формул Кардано и Феррари, мы даже можем найти эти корни для любых уравнений степени не выше 4. А вот что делать для старших степеней — пока совершенно неясно. Феррари и его последователи были почти уверены, что метод должен сработать, стоит только чуть-чуть поднажать. Возможно, формула получится очень сложной, но так или иначе, по всеобщему мнению, должна была существовать формула, выражающая корень уравнения 5-й (и выше, конечно) степени через коэффициенты уравнения, с использованием операций сложения, умножения и извлечения корня.

Увы, но всех ждал былинный отказ. Почему? Читаем дальше.

Новое время. Нищета, математика и романтика

В конце XVIII века начало складываться понимание, что что-то с поиском решений уравнений не так. В результате итальянец Руффини опубликует работу на 500 (это для математики очень много) страниц. Впрочем, доказательство оказалось весьма неполным.

Абель

Нильс Хенрик Абель прожил на белом свете всего 26 лет. Родился в семье пастора, поступил в Университет Осло. Парень был настолько талантлив, что преподаватели Университета назначили ему стипендию *из собственных средств*. Всю свою недолгую жизнь он страдал от хронического безденежья и туберкулёза, который его в конечном счёте и доконал. Он не дождался буквально нескольких недель до получения приглашения на постоянную позицию в Берлин.

Вьюнош со взором горящим

За те немногие годы, что были отпущены несчастливому потомку викингов, он успел достичь-таки вина в вопросе разрешимости уравнений степени выше 4-й. Уточнив результат Руффини, он доказал, что, вообще говоря, никакой формулы для общего решения не существует. Это принципиально закрывало вопрос о поиске формулы: таковой не существует. Оставался только вопрос, для каких уравнений корни всё же можно найти. И ответ на этот вопрос нашёл спустя несколько лет ещё один обладатель трагической судьбы, о котором ниже.

Галуа

Эварист Галуа, сын мэра небольшого французского задрищенска, родился в 1811 году. Детство парня пришлось на времена реакции, когда всякие роялисты взяли реванш за Великую французскую революцию. Вся недолгая, но славная жизнь Эвариста прошла на фоне борьбы республиканцев за восстановление республики и острого желания снова выгнать французскую монархию на мороз. В юности Галуа был достаточно типичным нердом-математиком: активно учил матан, а к 16 годам уже изучал современную ему математику, в частности осилил работу упомянутого выше Абеля.

Он неоднократно пытался поступить в престижную «Политехническую школу», однако неизменно проваливал экзамены. Во время последней попытки малость психанул и запустил тряпкой в неверного экзаменатора.

Молодой неистовый республиканец

«Почему экзаменаторы задают поступающим только запутанные вопросы? Может показаться, что они боятся быть понятыми теми, кого спрашивают. Откуда взялась эта злосчастная манера нагромождать в вопросах искусственные трудности? Неужели кто-нибудь думает, что наука слишком проста? А что из этого получается? Ученик заботится не о том, чтобы получить образование, а о том, чтобы выдержать экзамены. »

— *бугурт Галуа*

В результате вьюнош поступил в «Нормальную школу», откуда был попячен через год за республиканские взгляды. В это время он уже входил в состав политического движения республиканцев. Принимал активное участие Галуа и на баррикадах в июльской революции 1830 года, которая свергла-таки Карла X и поставила на его место Луи-Филиппа. К этому же времени он написал первую работу, которая была отправлена на рецензию Огюстену Коши. Последний был блестящим математиком, но весьма неприятным человеком и ретроградом и даже в Академию попал взамен попёртого при новом режиме со всех постов бонопартиста Гаспара Монжа. Первую работу Галуа он «потерял». Когда Галуа пришёл за объяснениями, его чуть ли не с лестницы спустили. Причина столь неласкового отношения роялиста Коши к республиканцу Галуа крылась то ли в политической сфере, то ли в том, что Коши подозревал, что Галуа у кого-то спёр результаты. Точнее уже не установить.

Галуа остался весьма недоволен сложившейся ситуацией и, продолжая заниматься наукой, решил больше своих результатов не публиковать, ибо нехуй.

На одной из пирушек Галуа поднял тост «за Луи-Филиппа». По недоразумению в другой руке у него в этот момент оказался кинжал, что было воспринято как пожелание Луи-Филиппу заточки в почку. Галуа, как и многие другие республиканцы, загремел на нары. В тюрьме был не особо жёсткий режим, и Эварист основательно пристрастился там к бухлу. Там же написал предисловие к двум уже написанным статьям, где изложил суть метода. Рукописи были настолько коротенькие, что когда он принёс их в типографию оценить стоимость печати, наборщик подумал, что ему принесли только введение в работу, а статьи потом будут.

Вскоре после того, как Галуа вышел на свободу, в его отношении была предпринята провокация — возможно со стороны полиции, а может просто влип в очередную историю. Скандал перерос в вызов на дуэль. Неизвестно до сих пор, что в точности произошло, но известен итог. 30 мая Эвариста смертельно ранили во время дуэли, а на следующий день двадцатилетний математик отправился в страну вечной охоты.

В ночь перед дуэлью успел написать три письма, в одном из которых успел изложить ещё пару подробностей по теории.

Брат Эвариста и его приятель Огюст Шевалье приложили впоследствии немало усилий к тому, чтобы все 3 статьи были опубликованы. На счастье спустя 30 лет эта работа попала-таки к Лиувиллю и вышла в свет. Слава и признание нашли Эвариста спустя несколько десятилетий после смерти.

Что касается Коши, то он тоже отжёг, но позже. Спустя два месяца случилась Июльская революция и Франция стала опять республикой. Коши заявил, что не желает служить всяким там холопам и с гордо поднятой головой удалился в эмиграцию вслед за Бурбонами и несколько лет зарабатывал себе на жизнь преподаванием математики королевским детишкам. Через шесть лет работодатель помре, детишки заявили, что знают достаточно и Коши вернулся в Париж, где гордо послал КЕМ республиканских работодателей и дауншифтнулся в препода математики иезуитского колледжа. В конце концов Наполеон III особым указом впилил живого классика обратно в Сорбонну,

Суть теоремы

По сути, Абель доказал следующее: «Если уравнение имеет степень 5 или выше, то не существует формулы, которая выражала бы его корни через коэффициенты уравнения при помощи арифметических операций и операции извлечения корня (это значит „выражаться в радикалах“)». Были приведены и соответствующие примеры таких уравнений.

Галуа сумел сделать ещё больше. Он сумел доказать, при каких условиях такая формула существует. То есть, глядя на уравнение, можно сказать, выражаются ли каким-нибудь образом его корни в радикалах или нет. Для этого безусловного epic wina потребовалось разработать то, что сейчас обычно называют теорией групп и теорией Галуа.

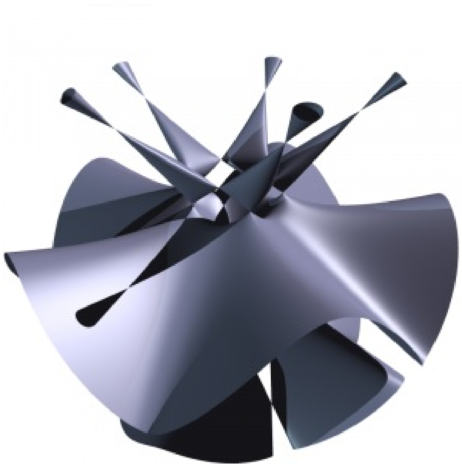
В будущем эта наука сильно разовьётся и найдёт приложения в кристаллографии, физике. Сейчас теория групп — это один из важных разделов высшей математики, активно применяемый и не менее активно изучаемый.

Что имеем с гуся?

Многое изменилось, и в наши дни больших и мощных компьютеров, позволяющих невозбранно считать и вычислять, вопрос о выразимости в радикалах корней алгебраических уравнений не является очень уж важным. Решения всегда можно найти численно.

Абель, Галуа и примкнувший к ним Руффини закрыли вопрос разрешимости уравнений. Впрочем, значимость этого вопроса не только в самой теореме, но и в том, сколько всего интересного и полезного появилось в математике благодаря ему. О комплексных числах (без которых современная наука немыслима) и теории групп мы уже помянули. Отметим, что не последнюю роль в появлении привычной нам буквенной записи с неизвестными и коэффициентами, придуманной Виетом, сыграл как раз сабж.

Вообще, оказалось, что вопрос изучения уравнений весьма продуктивен и важен. Если, скажем, у нас имеется алгебраическое уравнение от нескольких переменных, то множество его решений — это объект, который называется алгебраическим многообразием (ну почти). Вокруг этого чудесного объекта вприсядку дрочат самые разные математики, криптографы, физики-теоретики, астрономы и т. д. Чего стоит, скажем, многообразие Калаби-Яу. Ну и уж конечно, классическим тут является вопрос о том, может ли такое многообразие содержать в себе решения указанного вида (например, целочисленные). И это уже не что иное, как великая и могучая теорема Ферма.



Вполне себе алгебраическое многообразие (задается уравнение 5-й степени, ну да не суть)

Так что сам предмет исследования оказался очень важным и продуктивным.

Как и многие другие «великие проблемы», смущавшие умы учёных столетиями, ответ на сабж оказался лежащим совершенно в другой плоскости, нежели это предполагалось вначале. Ни Тарталья, ни Кардано не могли предположить, что алгоритма поиска решения у уравнений вообще не существует. Увы, но если когда-то считалось, что на любой вопрос можно найти ответ (если хорошо постараться), то в 18-19 веке пришло осознание того, что бывают и нерешаемые задачи. Пришло понимание необходимости изучить и понять, что же такое «алгоритм». Где-то тут, в этом круге задач, можно искать истоки того, что позже станет математической логикой и программированием.

Тем не менее, общее решение уравнения пятой степени можно выразить через т.н. тэта-функции, для шестой и более высоких используются другие причуды. На практике проще получать достаточно точные решения при помощи численных методов.

См. также

- «Теорема Абеля в задачах и решениях» — годнейшая книжка для школьника\студента младших курсов, который хочется обучиться теории групп, комплексному анализу и в результате узнать доказательство теоремы.
- Для желающих обмазаться древней математикой
- Биография Галуа и рассказ о том, что он доказал для самых маленьких.
- Биография Абеля